

Eine Betrachtung der Isotopentabelle zeigt ferner, daß keine Möglichkeit besteht, etwa ein K-Einfang zeigendes Hf-Isotop für die 19-Sek.-Aktivität verantwortlich zu machen, da entsprechende Cp-Isotope fehlen bzw. als Folgeprodukte durch ihre Aktivität auffallen müßten.

Es muß daher geschlossen werden, daß es sich bei der Aktivierung des kurzlebigen Körpers um einen (n, γ) -Prozeß eines Hf-Isotops handelt, der zum nächsthöheren stabilen Isotop führt und dieses in einen angeregten Zustand versetzt, dessen Anregungsenergie $250 (190 + 65)$ KeV beträgt und der mit einer Halbwertszeit von 19 Sek. in den Grundzustand übergeht. Zur Frage der Zuordnung zu einer Massenzahl müssen wir wieder die Mattausche Kernisomeren-Regel heranziehen. Die Massenzahl 174 soll wegen der geringen Häufigkeit des

Isotops außer Betracht bleiben. Wegen der Mattauschen Regel sind die Kerne 176, 178, 180, die sämtlich dem Typus g-g angehören, auszuschließen, so daß nur 177 und 179 übrig bleiben. Da beide gleicher Häufigkeit sind, können wir keine Wahl zwischen ihnen treffen. Wir wollen daher die beobachtete Aktivität von 19 Sek. versuchsweise dem $^{177, 179}\text{Hf}^*$ zuordnen.

Für beide Isotope liegen auch Angaben über den Kernspin vor¹³. Er beträgt bei beiden $\leq 3/2$. Sollte der Kernspin $i = 3/2$ zutreffen, so wäre dies das erstemal, daß für einen solchen Fall ein Isomer existierte, während der Spin $i = 1/2$ ausgezeichnet zu den anderen kernphysikalischen Erfahrungen passen würde.

¹³ E. Rasmussen, Naturwiss. 23, 69 [1935].

Quantentheorie der Feldmechanik

Von FRITZ BOPP

Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Physik, Hechingen

(Z. Naturforschg. 1, 196—203 [1946]; eingegangen am 2. März 1946)

Die früher abgeleiteten Bewegungsgleichungen der Feldmechanik werden — zunächst ohne Berücksichtigung der Strahlungskraft — nach dem Retardierungsparameter entwickelt, und zwar einen Schritt weiter als in der Lorentzschen Theorie des Elektrons. Die resultierenden Bewegungsgleichungen enthalten neue Freiheitsgrade, die eine Zitterbewegung beschreiben und bereits im klassischen Bereich zu spinartigen Drehimpulszusätzen Anlaß geben. Der formale Übergang zur Quantenmechanik macht keine Schwierigkeit und führt zu einer Wellengleichung vom Diracschen Typ allerdings derart, daß zunächst nur Lösungen mit ganzzahligem Spin möglich sind und daß im allgemeinen eine starke Kopplung besteht zwischen Lösungen, die zu verschiedenem Spin gehören. Der Spezialfall des kräfte- und impulsfreien Teilchens wird besonders untersucht. Die Wellengleichung vereinfacht sich, wird aber keineswegs trivial. Ihre Eigenlösungen geben Zustände des Elementarteilchens, die zu verschiedenen Massen- und Spinwerten gehören, fassen also prinzipiell die Gesamtheit der Elementarteilchen in einer Wellengleichung zusammen. Quantitativ sind die Ergebnisse in der vorliegenden Näherung noch unbefriedigend. Die Art der Abweichung von den wirklichen Verhältnissen liegt nach früheren Untersuchungen an der Näherung und ist von vornherein zu erwarten.

§ 1. Zur Quantelung der Feldmechanik

Dem Versuch, die Singularitätenschwierigkeit in der Quantentheorie der Wellenfelder durch Abänderung der Maxwell'schen Gleichungen zu lösen, begegnet man im allgemeinen mit Vorbehalt. Es ist die Meinung verbreitet, daß die Annahme spezieller Struktureigenschaften unterhalb endlicher Grenzdimensionen ebenso sinnlos sei wie die

von gleichzeitigen Orts- und Impulsmessungen, deren Genauigkeit die Heisenbergsche Unschärferelation übersteigt. C. F. Weizsäcker¹ glaubt sogar, daß man die Notwendigkeit einer solchen Annahme mindestens in speziellen Fällen aus der Unschärferelation ableiten kann. Er zeigt, daß

¹ „Theorie des Mesons“ in Heisenbergs „Vorträge über kosmische Strahlung“, Springer 1943, 10, 7, S. 108.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

es nicht möglich ist, die aus Konvergenzgründen notwendigen Abweichungen des Yukawa-Feldes von der kanonischen Gestalt $e^{-\kappa r}/r$ durch Streuexperimente festzustellen.

Gleichwohl werden wir im folgenden versuchen, aus der früher entwickelten klassischen Feldmechanik² quantentheoretische Folgerungen zu ziehen. Vorliegende Ansätze für eine „Überquantenmechanik“³ sind kaum so weit gefördert, daß sie deren Notwendigkeit beweisen. Die bisherigen Formulierungen scheinen mir außerdem nicht ohne Strukturaussagen auszukommen. In der Quantengeometrie von March ist es die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, daß zwei Punkte noch unterscheidbar seien. Bei Heisenberg muß man eine Aussage darüber erwarten, wie die η -Matrix zweier benachbarter Streuzentren aussieht, wenn sie für das einfache Streuzentrum bekannt ist. Auch wenn man die Ortsunbestimmtheit durch Vertauschungsrelationen erfassen will, scheint mir die Einführung von Strukturfunktionen notwendig.

Die quantentheoretischen Argumente v. Weizsäckers schließen m. E. die Möglichkeit von Strukturaussagen nicht aus. Man denke sich das von v. Weizsäcker diskutierte Teilchen aus zwei sehr schweren Komponenten zusammengesetzt, deren Bindung so stark sei, daß der Massendefekt die beiden Teilmassen fast vollständig kompensiert. Für das Gesamtgebilde ist zweifellos die v. Weizsäckersche Behauptung richtig. Doch muß es möglich sein, über die gegenseitige Lage der Komponenten um so genauere Aussagen zu machen, je größer deren Masse ist. Die Quantentheorie läßt also Strukturaussagen zu, ohne daß diese durch Streuexperimente nachweisbar sein müssen. Sie spiegeln sich wider, wie sich zeigen wird, in der Mannigfaltigkeit der möglichen Energiezustände des Teilchens bzw. in der Gesamtheit der in der Natur vorkommenden Elementarteilchen.

Selbstverständlich soll obiges Bild nur die Tragweite des v. Weizsäckerschen Schlusses deutlich machen, nach welchem bereits quantentheoretische Überlegungen Grenzen für die Anwendbarkeit der Quantentheorie zeigen sollten. Es soll

² F. Bopp, I. Ann. Physik (5) **38**, 549 [1940]; II, Ann. Physik (5) **42**, 572 [1943]; III, Ann. Physik (einges. Juli 1944, Ersch. ungewiß); IV, Physik. Z. (einges. Dez. 1944, Kurzmitt. Jan. 1945, Korr. März 1945); V, Z. Naturforschg. **1**, 53 [1946].

³ A. March, Naturwiss. **31**, 49 [1943]; W. Heisenberg, I, Z. Physik **120**, 513 [1943]; II, Z. Physik **120**, 673 [1943]; III, Z. Physik **176**, — [1944]; IV, Z. Physik; für die Überlassung eines Skriptums danke ich herzlich.

weder eine ad hoc eingeführte Hypothese über die Struktur des Elektrons sein noch ein Beweis dafür, daß die bisherige Quantenmechanik für die Theorie der Elementarteilchen ausreicht. Die Entscheidung darüber liefert allein der Vergleich der vollendeten Theorie mit der Erfahrung.

Den Ausgangspunkt unserer Untersuchung bildet die klassische Feldmechanik (I. c. 2, IV und V). Die Bewegungsgleichungen der Feldmechanik folgen aus den Wellengleichungen für die Feldgrößen unter der Voraussetzung, daß sich die felderzeugenden Teilchen im Gesamtfeld, d. h. im Eigenfeld und im Felde der übrigen Teilchen kräftefrei bewegen. Im Falle vektorieller Felder ist der Anteil des Außenfeldes die Lorentz-Kraft, der des Eigenfeldes zerfällt in Trägheits- und Strahlungskraft. Die Quantelung der Bewegungsgleichungen der Feldmechanik kann gemäß ihrer Herkunft grundsätzlich auf zwei Wegen erfolgen. Erstens kann man den Übergang zur Bewegungsgleichung *nach* der Quantelung des Wellenfeldes durchführen, wie es Pais⁴ versucht hat. Da die bisherige Theorie der Wellenfelder an die duale Theorie für Feld und Teilchen anknüpft, bietet die Quantelung der feldbestimmten Trägheitskraft grundsätzliche Schwierigkeiten. Der Ausweg von Pais, gleichsam dual zu rechnen unter der Annahme eines verschwindenden Massengliedes in der Gleichung für Materiewellen, liefert wahrscheinlich eine praktisch ausreichende Genauigkeit, kann aber nicht völlig befriedigen, weil der Ansatz für die Materiewellen zusätzliche Annahmen erfordert ohne klassische Korrespondenz. Zweitens kann man den Übergang zur Bewegungsgleichung noch im klassischen Bereich vollziehen, um aus dieser die Quantenmechanik zu entwickeln. Hierbei macht umgekehrt die Strahlungskraft wegen ihres energieerzeugenden Charakters Schwierigkeiten.

Eine willkürfreie Lösung findet man m. E. nur dann, wenn man beide Methoden etwa so kombiniert, wie es in der dualen Theorie geschieht. Man gehe von den Bewegungsgleichungen aus unter Weglassung der Strahlungskraft. Diese vereinfachten Gleichungen lassen sich aus einem Hamiltonschen Prinzip ableiten, dessen Lagrange-Funktionstyp bereits M. Born⁵ angegeben hat

⁴ A. Pais, On the Selfenergy of the Electron; Verf. danke ich für die Übersendung eines Skriptums durch Hrn. Prof. Rosenfeld. Über die Veröffentlichung ist mir unter den gegenwärtigen Umständen nichts mehr bekannt geworden.

⁵ Proc. Roy. Soc. [London] Ser. A **143**, 410 [1933/34].

(vergl. auch l. c.², I § 2). Ihre Quantelung bereitet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten. Die Berücksichtigung der Ausstrahlung kann anschließend erfolgen wie in der gewöhnlichen Strahlungstheorie. Die Vorwegnahme der Bewegungsgleichungen ohne Strahlungskraft hat in der Quantentheorie im Gegensatz zur klassischen Mechanik wegen der Existenz stationärer Zustände einen guten Sinn.

§ 2. Wellengleichung der Feldmechanik

Im folgenden beschränken wir uns darauf, den ersten Teil der eben formulierten Aufgabe durchzuführen. Wir wollen die zum reversiblen Teil der Bewegungsgleichung der Feldmechanik gehörige Wellengleichung ableiten, dabei aber nur die ersten Schritte einer Entwicklung nach dem Retardierungsparameter berücksichtigen. In nullter Näherung erhält man die bekannten Bewegungsgleichungen, aus denen die Klein-Gordonsche Gleichung folgt. Die Gleichungen erster Näherung sollen hier berechnet und untersucht werden.

Das Wirkungsintegral für ein Teilchen mit den Koordinaten $x_\alpha = x_\alpha(s)$, $u_\alpha = \dot{x}_\alpha(s)$ ($\alpha = 1 \dots 4$) in einem äußeren Felde (Viererpotential A_α) hat folgende Form⁶:

$$\int \mathcal{L} ds = \frac{e^2}{c^3} \int u_\alpha(s) u_\alpha(s') f(\sigma) ds ds' - \frac{e}{c} \int u_\alpha A_\alpha ds. \quad (1)$$

Darin ist

$$\sigma = \frac{1}{c^2} [x_\alpha(s) - x_\alpha(s')]^2. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \int u_\alpha(s) u_\alpha(s - \tau) f(\sigma) d\tau = \int \left\{ u_\alpha^2 - u_\alpha \dot{u}_\alpha \tau + \frac{1}{2} u_\alpha \ddot{u}_\alpha \tau^2 + \dots \right\} \left\{ f(\sigma_0) + f'(\sigma_0) \left[-\frac{u_\alpha \dot{u}_\alpha}{c^2} \tau^3 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{3} u_\alpha \ddot{u}_\alpha + \frac{1}{4} \dot{u}_\alpha^2 \right) \tau^4 \right] + \frac{1}{2} f''(\sigma_0) \left[-\frac{u_\alpha \ddot{u}_\alpha}{c^2} \tau^3 \dots \right]^2 \dots \right\} d\tau \end{aligned} \quad (7)$$

mit $\sigma_0 = \frac{1}{c^2} u_\alpha^2 \tau^2$. Darin sind folgende typische Integrale enthalten:

$$\int f(\sigma_0) \tau^v d\tau = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - u_\alpha^2}} \right)^{v+1} k_v,$$

$$\int f'(\sigma_0) \tau^v d\tau = \frac{v-1}{2} \left(\frac{c}{\sqrt{1 - u_\alpha^2}} \right)^{v+1} k_{v-2},$$

⁶ l. c.¹, I § 2, II § 4.

Die Lagrange-Funktion lautet also

$$\mathcal{L} = \frac{e^2}{c^3} \int u_\alpha(s) u_\alpha(s - \tau) f(\sigma) d\tau - \frac{e}{c} u_\alpha A_\alpha, \quad (3)$$

wobei σ aus Gl. (2) hervorgeht, wenn man s' durch $s - \tau$ ersetzt. Die Funktion $f(\sigma)$ charakterisiert die spezielle Art der Feldgleichungen; z. B. ist für die Maxwell'schen⁷ Gleichungen $f(\sigma) = \delta(\sigma)$. Allgemein gilt: $\int f(\sigma) \delta\sigma = 1$.

Die Entwicklung nach dem Retardierungsparameter ergibt in erster Näherung

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -mc \sqrt{1 - u_\alpha^2} - \frac{e}{c} u_\alpha A_\alpha, \\ m &= \frac{e^2}{c^3} \int f(-\tau^2) d\tau, \end{aligned} \quad (4)$$

woraus die bekannten Bewegungsgleichungen (für negative Ladungen) folgen:

$$\frac{d}{ds} \frac{m u_\alpha}{\sqrt{1 - u_\alpha^2/c^2}} = -\frac{e}{c} f_{\alpha\beta} u_\beta. \quad (5)$$

Das Wirkungsintegral in Gl. (1) ist ebenso wie das aus Gl. (4) folgende parameterinvariant. Es gilt also in gleicher Form für beliebige Parameter. Dies garantiert, daß man dafür z. B. die Eigenzeit wählen kann, daß also die Nebenbedingung $u_\alpha^2 = -c^2$ mit den Bewegungsgleichungen verträglich ist. Setzen wir diesen Wert in Gl. (5) ein, so folgt:

$$m \dot{u}_\alpha = -\frac{e}{c} f_{\alpha\beta} u_\beta, \quad (6)$$

woraus sich umgekehrt wieder $u_\alpha^2 = \text{const}$ durch Integration ergibt.

Die systematische Entwicklung der Lagrange-Funktion in Gl. (3) nach dem Retardierungsparameter liefert:

$$\int f''(\sigma_0) \tau^v d\tau = \frac{v-1}{2} \cdot \frac{v-3}{2} \left(\frac{c}{\sqrt{1 - u_\alpha^2}} \right)^{v+1} k_{v-4}, \quad (8)$$

in denen die Konstanten k_v durch die Integrale

$$k_v = \int f(-\tau^2) \tau^v d\tau \quad (9)$$

⁷ P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. [London] Ser. A 167, 148 [1938].

definiert sind. In der üblichen Näherung wird nur das Integral k_0 berücksichtigt. Gehen wir einen Schritt weiter bis zum Integral k_2 — das Integral k_1 verschwindet —, so lautet die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = -\frac{k_0 e^2}{c^3} \sqrt{-u_\alpha^2} - \frac{3}{8} \frac{k_2 e^2}{\sqrt{-u_\alpha^2}} \left[\dot{u}_\alpha^2 + \left(\frac{u_\alpha \dot{u}_\alpha}{\sqrt{-u_\alpha^2}} \right)^2 \right] - \frac{e}{c} u_\alpha A_\alpha. \quad (10)$$

Es ist bequem, den Parameter s mit der Koordinatenzeit t zu identifizieren. Man vermeidet auf diese Weise die für die Diskussion lästige Nebenbedingung $u_\alpha^2 = -c^2$. Mit den Einheiten: Elektronenmasse $m_0 = 1$, Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ und Elektronenladung $e = 1$ vereinfacht sich Gl. (10) folgendermaßen:

$$\mathcal{L} = A_0 - (\mathbf{v}, \mathfrak{A}) - k_0 \sqrt{1 - v^2} - \frac{3}{8} \frac{k_2}{\sqrt{1 - v^2}} \left[\dot{\mathbf{v}}^2 + \left(\frac{\mathbf{v} \dot{\mathbf{v}}}{\sqrt{1 - v^2}} \right)^2 \right]. \quad (11)$$

Für die neue Lagrange-Funktion ist die Abhängigkeit von der Beschleunigung charakteristisch gemäß dem Ansatz

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}), \quad (12)$$

der neue Freiheitsgrade mit sich bringt⁸. Nach E. T. Whittaker⁹ ergeben sich daraus Hamilton-Funktion und Hamiltonsche Gleichungen nach Einführung der zu $\dot{\mathbf{r}}$ und $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ kanonisch konjugierten Größen

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{v}}}, \quad \mathfrak{s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{v}}}, \quad (13)$$

wenn man in dem Ausdruck

$$\mathcal{H} = \mathbf{v} \mathbf{p} + \dot{\mathbf{v}} \mathfrak{s} - \mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) = \mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}; \mathbf{v}, \mathfrak{s}) \quad (14)$$

für die Hamilton-Funktion \mathcal{H} als Funktion von \mathbf{r} , \mathbf{v} und \mathfrak{s} einsetzt. Die Hamiltonschen Gleichungen haben die kanonische Gestalt

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}}; \quad \dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathfrak{s}}, \quad \dot{\mathfrak{s}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{v}}; \quad (15)$$

wie man leicht verifiziert. Es sind also (\mathbf{r}, \mathbf{p}) und $(\mathbf{v}, \mathfrak{s})$ kanonisch konjugierte Variabelpaare. Die Elimination ist einfacher als in dem gewöhnlichen mechanischen Problem, weil sie von der Wahl der Potentiale unabhängig ist. Aus Gl. (11) folgt:

$$\mathfrak{s} = -\frac{3}{4} \frac{k_2}{\sqrt{1 - v^2}} \left(\dot{\mathbf{v}} + \frac{(\mathbf{v} \dot{\mathbf{v}}) \mathbf{v}}{1 - v^2} \right). \quad (16)$$

Die Auflösung nach $\dot{\mathbf{v}}$ liefert

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{4}{3 k_2} \sqrt{1 - v^2}^3 (\mathfrak{s} - (\mathbf{v} \mathfrak{s}) \mathbf{v}). \quad (17)$$

⁸ Wegen Streichung der Strahlungskraft stehen diese nicht im Widerspruch zu den Bedingungen in l. c. ¹, VI.

Danach ist

$$\mathcal{H} = A_0 + (\mathbf{v}, \mathbf{p} + \mathfrak{A}) + k_0 \sqrt{1 - v^2} - \frac{2}{3 k_2} \sqrt{1 - v^2}^3 (\mathfrak{s}^2 - (\mathbf{v} \mathfrak{s})^2). \quad (18)$$

Die Natur der neuen Freiheitsgrade haben wir bereits früher diskutiert¹⁰. Wenn neben der Masse noch andere Trägheitsglieder vorkommen, dann ist die Bewegung durch Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit noch nicht vollständig bestimmt. Der klassischen Bewegung überlagert sich eine Zitterbewegung, die durch die neuen Variablen \mathbf{v} und \mathfrak{s} beschrieben wird. Sie führt zu spinartigen Effekten, was die Erhaltungssätze sofort deutlich machen. Wie für jedes kanonische System (mit zeit-unabhängiger Hamilton-Funktion) gilt der *Energiesatz*:

$$E = \mathcal{H} = \text{const.} \quad (19)$$

Der *Drehimpulssatz*, der im kugelsymmetrischen Potentialfeld ($A_0 = A_0(r)$) bei verschwindendem Magnetfeld ($\mathfrak{A} = 0$) gilt, hat einen von der Zitterbewegung herrührenden Zusatz:

$$\mathfrak{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}] + [\mathbf{v}, \mathfrak{s}] = \text{const.} \quad (20)$$

Der im kräftefreien Falle geltende *Impulssatz* hat die übliche Form:

$$\mathbf{p} = \text{const.} \quad (21)$$

Der Übergang zur Quantenmechanik vollzieht sich in bekannter Weise. Die kanonischen Variablen in der Hamilton-Funktion in Gl. (18) werden zu algebraischen Größen, zwischen denen die Heisenbergschen Vertauschungsrelationen gel-

⁹ Grundlehren der math. Wiss. **17**, Analytische Dynamik, § 110, S. 281, Berlin 1924.

¹⁰ l. c. ¹, II, S. 607.

ten. Sie lauten für die nichtkommutativen Größenpaare

$$[p_k, x_1] = \frac{\hbar}{i} \delta_{k1}; [s_k, v_1] = \frac{\hbar}{i} \delta_{k1}. \quad (22)$$

Die Übersetzung ist wegen der Nichtvertauschbarkeit der Faktoren im letzten Glied der Gl. (18) nicht ohne weiteres eindeutig. Nach Einführung von Polarkoordinaten im Geschwindigkeitsraum gemäß $[v = v(\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)]$ erhalten wir auf Grund unsrer Betrachtungen im Anhang aus der transformierten Hamilton-Funktion

$$\mathcal{H} = -A_0 + (v, p + \mathfrak{M}) + k_0 \sqrt{1-v^2} - \frac{2}{3k_2} \left\{ \sqrt{1-v^2} s_v^2 + \frac{1}{v^2} \sqrt{1-v^2}^3 \left(s_\vartheta^2 + \frac{s_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} \right) \right\} \quad (23)$$

als korrespondierenden Operator den Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -A_0 + (v, p + \mathfrak{M}) + m \sqrt{1-v^2}, \\ m &= k_0 + \frac{2\hbar^2}{3k_2} \frac{1-v^2}{v^2} \left\{ (1-v^2) \frac{\partial}{\partial v} \left(v^2 \frac{\partial}{\partial v} \right) - A \right\}, \\ -A &= \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Das Integrationselement im Geschwindigkeitsraum lautet dabei

$$d\sigma = \frac{v^2 \sin \vartheta dv d\vartheta d\varphi}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (25)$$

Durch die für die Anwendung sehr nützliche Variabelntransformation

$$v = \mathfrak{E} \cos \gamma, \quad \psi = \frac{\psi_0}{\mathfrak{E} \sin \gamma} \quad (26)$$

gehen Masseoperator und Integrationselement über in

$$m = k_0 + \frac{2\hbar^2}{3k_2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} - 1 - \frac{A}{\mathfrak{E} \sin^2 \gamma} \right\} \quad (27)$$

bzw.

$$d\sigma_0 = \mathfrak{E} \sin \gamma \sin \vartheta d\gamma d\vartheta d\varphi = \mathfrak{E} \sin \gamma d\Omega d\gamma. \quad (28)$$

Die Wellengleichung $\left\{ \mathcal{H} + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \psi = 0$ zeigt eine bemerkenswerte Verwandtschaft zur Diracschen, die besonders deutlich hervortritt, wenn wir zur Viererschreibweise zurückkehren. Es ist

$$\left\{ \left(u_\alpha, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + A_\alpha \right) + m \right\} \psi = 0 \quad (29)$$

mit

$$\begin{aligned} m &= k_0 + \frac{\hbar^2}{3k_2} M_{\alpha\beta}^2, \\ M_{\alpha\beta}^2 &= \frac{1}{i} \left(u_\alpha \frac{\partial}{\partial u_\beta} - u_\beta \frac{\partial}{\partial u_\alpha} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Viererstrom und Energie-Impuls-Tensor lauten danach:

$$s_\alpha = \int \psi^* u_\alpha \psi dU \quad (31)$$

und

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int \{ \psi^* u_\beta P_\alpha \psi + \psi u_\beta P_\alpha^* \psi^* \} dU. \quad (32)$$

Darin bedeutet dU das Integrationselement $dU = du_1 du_2 du_3 du_4$ und

$$P_\alpha = + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + A_\alpha, \quad P_\alpha^* = - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + A_\alpha.$$

Da die drehimpulsartigen Faktoren im Operator in Gl. (29) nur ganzzahlige Eigenwerte haben — auch der von E. Schrödinger¹¹ diskutierte Kunstgriff scheint mir nicht über diese Mannigfaltigkeit der Lösungen hinauszuführen —, beschreibt die obige Wellengleichung nur Teilchen mit ganzzahligem Spin. Dem entspricht, daß es — wie wir noch sehen werden — keine Übergänge zwischen Zuständen positiver und negativer Energiewerte gibt. Um so mehr fällt auf, daß die Ladungsdichte im Gegensatz zu der der Klein-Gordon'schen Gleichung einen definiten Wert hat, positiv oder negativ definit, je nachdem ob es sich um einen Zustand positiver oder negativer Energie handelt.

§ 3. Das Elektron im kräfte- und impuls-freien Zustand

Den einfachsten Sonderfall erhält man, wenn das äußere Feld und der Impuls des Teilchens verschwinden. Beides ist zugleich möglich, weil der Impuls im feldfreien Fall eine Konstante der Bewegung ist. Wegen der Zitterbewegung bedeutet $p=0$ im allgemeinen kein ruhendes Teilchen, das in der Quantenmechanik wegen der Unschärfebeziehung zwischen den Variablen v und ϑ gar nicht in Strenge existiert. Die Spezialisierung $p=0$ ist darum wesentlich und nicht etwa nur durch Lorentz-Transformation mit dem Falle $p=\text{const}$ verbunden. Nach dieser Vereinfachung lautet die Wellengleichung gemäß Gl. (2, 24 u. 27)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi}{d\gamma^2} &= V(\gamma) \cdot \psi \quad \text{mit} \\ V &= \frac{j(j+1)}{\mathfrak{E} \sin^2 \gamma} + 1 - \frac{3k_0 k_2}{2\hbar^2} + \frac{3k_2 E}{2\hbar^2} \mathfrak{E} \cos \gamma, \end{aligned} \quad (1)$$

wenn wir für den Operator Λ , der nach Gl. (2, 20) das Spinmoment darstellt ($[v, \mathfrak{s}]^2 = \hbar^2 \Lambda$) und in

¹¹ Ann. Physik (5) **32**, 49 [1938] (Planck-Heft).

unserm Falle eine Konstante der Bewegung ist, seinen Eigenwert $\Lambda = j(j+1)$ (mit $j = 0, 1, 2, \dots$) einsetzen.

Gl. (1) ist keineswegs trivial und nicht einmal sehr einfach. Soweit Eigenlösungen existieren, liefert die Gleichung Zustände verschiedenen Spins und bei gleichem Spin solche verschiedener Energie. Grundsätzlich führt also die Quantelung der Feldmechanik nicht nur zu einem einzigen Zustand des Elementarteilchens, sondern zu einer ganzen Folge von Zuständen, die man je nach der Lebensdauer als angeregte Zustände oder als neue Elementarteilchen ansprechen wird. Eigenwerte sind höchstens dann vorhanden, wenn das Potential $V(\gamma)$ in Gl. (1) eine Mulde bildet, deren Sohle bei negativen Werten liegt. Bereits hieraus folgt eine überraschende und bemerkenswerte Aussage über die Feldkonstanten k_0 und k_2 . Es bildet sich sicher nur dann eine solche Mulde, wenn

$$0 < E < k_0 - \frac{2\hbar^2}{3k_2} \quad (2)$$

und damit

$$k_0 k_2 > \frac{2\hbar^2}{3} \quad (3)$$

ist. Wegen des großen Wertes von \hbar (in unsern Einheiten: $\hbar = 1/\alpha = 137$) stellt Ungl. (4) eine sehr einschneidende Forderung dar, die nicht mit der von der Lorentzschen Theorie her zu erwartenden Annahme $k_0 \approx 1$, $k_2 \ll 1$ verträglich ist. Die Lorentzsche Theorie kann darum nicht im üblichen Sinne als Näherung der Feldmechanik gelten. Man muß auch in nullter Näherung das Integral k_2 berücksichtigen.

Die Bedeutung dieser Ungleichungen für die Feldtheorie folgt aus der Gl. (28) in l. c.¹ V vorangehenden Relation. Danach ist

$$k_0 = \frac{3}{4} \int \hat{\Phi}(s) ds, \quad k_2 = -\frac{1}{3} \int \hat{\Phi}(s) \frac{ds}{s} \quad (4)$$

und $\hat{\Phi}(s)$ bedeutet die die Feldtheorie kennzeichnende Potential-Oberfunktion, aus der z.B. das statische Potential der Punktladung durch Laplace-Transformation folgt:

$$A_0(r) = \frac{3}{2} \Phi\left(\frac{3r}{2}\right), \quad \Phi(r) = \int_0^\infty \hat{\Phi}(s) e^{-rs} ds. \quad (5)$$

Im Falle des Coulomb-Feldes und der Maxwell'schen Gleichungen ist z.B. $\hat{\Phi} = 1$. Eine die Ungleichung (4) verwirklichende Oberfunktion zeigt Abb. 1. Danach ist

$$k_0 = \frac{3}{4} a U, \quad k_2 = \frac{U}{3a}, \quad (6)$$

und Ungl. (4) lautet

$$k_0 k_2 = \frac{1}{4} U^2 > \frac{2\hbar^2}{3}. \quad (7)$$

Sie läßt sich durch hinreichend große U sicher erfüllen¹². Man könnte sogar a so wählen, daß die klassische Bedingung $k_0 = 1$ erhalten bleibt. Aber

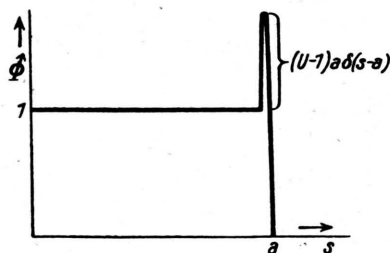


Abb. 1. Potentialoberfunktion.

in diesem Falle würde das statische Potential wegen $a \ll 1$ schon weit außerhalb des klassischen Elektronenradius vom Coulomb-Feld abweichen, was kaum mit den Eigenschaften der Kaskadenschauer verträglich wäre. Man sollte im Gegenteil erwarten, daß der Coulombsche Feldverlauf noch

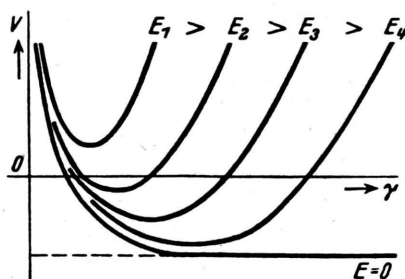


Abb. 2. Potentialverlauf in Abhängigkeit von der Energie.

innerhalb des klassischen Elektronenradius gilt, daß also a wesentlich größer sei als bisher. Trotz extremer Werte von a kann die Energie klein sein. Sie ist es sicher, wenn sich nur U hinreichend wenig von $\frac{2}{3} \sqrt{6} \hbar$ unterscheidet [Ungl. (7)].

Der qualitative Verlauf des Potentials $V(\gamma)$ ist in Abb. 2 in Abhängigkeit von der Energie E dargestellt. Für hinreichend große E gibt es in Über-

¹² Von den Bedingungen in l. c.¹ V, ist in unserm Beispiel die Photonenbedingung nicht erfüllt. Das spielt hier keine Rolle, kommt im übrigen leicht in Ordnung durch Ausglättung der Zacke.

einstimmung mit Ungl. (2) keine Eigenlösungen. Da das Wirkungsintegral $\int \sqrt{V - V'} d\gamma$ zwischen den Umkehrpunkten $V(\gamma) = 0$ mit abnehmendem E wächst, um mit $E = 0$ unendlich zu werden, muß man bei allmählich verschwindender Energie immer neue Eigenlösungen erwarten. Zum Unterschied von einem gewöhnlichen Eigenwertproblem ist die größte Energie dem kleinsten Wirkungsintegral zugeordnet. Die höheren Quantenzustände liegen energetisch tiefer, ohne daß es ein Minimum gäbe. Danach sind für die durch Gl. (1) beschriebenen Teilchen Zustände beliebig kleiner Masse möglich. Dieses Ergebnis hängt zweifellos mit unsrer Näherung zusammen. Denn die die Nebenbewegung kennzeichnende Funktion¹³

$$M(p) = \frac{2e^2}{m c^3} \left\{ \frac{1}{2} k_0 - \frac{2}{3} k_1 p + \frac{3}{8} k_2 p^2 \right\} \quad (8)$$

hat Nullstellen mit positivem Realteil, genügt also nicht der Bedingung der Massenstabilität. Es folgt daraus klassisch das Wessel-Diracsche Paradoxon, wonach das Teilchen bei Wechselwirkung mit äußeren Kräften unter ständigem Massenschwund und dauernder Ausstrahlung sehr rasch der Lichtgeschwindigkeit zustrebt. Quantenmechanisch setzt dieses Paradoxon in Übereinstimmung mit obigem Ergebnis ein bis zu verschwindender Masse hinreichendes Massenspektrum voraus. Natürlich kann man nicht umgekehrt schließen. Denn die Stabilität der Masse kann ebensogut durch Begrenzung des Spektrums als auch durch einschneidende Übergangsverbote erzwungen werden. Immerhin ist es bemerkenswert, daß schon ein geringfügig ansteigendes Zusatzglied im Potential der Gl. (1) genügt, um das Massenspektrum auf endlich viele Terme zu begrenzen.

Diese Feststellungen bedeuten, daß wir von der vorliegenden Näherung nur qualitative Aussagen erwarten dürfen. Wir dürfen uns darum mit einer groben Abschätzung für die Eigenwerte begnügen. Nach dem WBK-Verfahren erhält man letztere aus der Gleichung

$$\frac{1}{\pi} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \sqrt{V - V'} \cdot d\gamma = n + \frac{1}{2}, \quad (V'(\gamma_1) = V'(\gamma_2) = 0), \quad (9)$$

wobei nach E. C. Kemble¹⁴ für V' wegen der Singularität im Ursprung nicht das Potential V , sondern die modifizierte Funktion

¹³ l. c. 1, V, Gl. (21).

¹⁴ The Fundamental Principles of Quantum Mechanics, London 1937, S. 107.

$$V' = \frac{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2}{\sin^2 \gamma} - z + \varepsilon \cos \gamma, \\ z = \frac{3 k_0 k_2}{2 \hbar^2}, \quad \varepsilon = \frac{3 k_2 E}{2 \hbar^2} \quad (10)$$

zu setzen ist. Näherungsweise folgt daraus

$$\frac{1}{4} (V - V')_{\min} \cdot \Delta \gamma = n + \frac{1}{2}. \quad (11)$$

— V'_{\min} bedeutet darin die Tiefe der Potentialmulde und $\Delta \gamma$ ihre Breite zwischen den Umkehrpunkten.

Wenn $\varepsilon \ll z$ und $z \lesssim \left(j + \frac{1}{2}\right)^2$, d. h. wenn jedenfalls z nicht groß gegen $\left(j + \frac{1}{2}\right)^2$ ist, erhält man

$$-V'_{\min} \approx z,$$

$$\Delta \gamma \approx \ln(2j+1) \frac{\sqrt{z}}{\varepsilon} \left(\sqrt{1 + \frac{4z}{(2j+1)^2}} - 1 \right)$$

und nach Gl. (11)

$$\varepsilon = (2j+1) \sqrt{z} \left(\sqrt{1 + \frac{4z}{(2j+1)^2}} - 1 \right) e^{-\frac{2}{\sqrt{z}}(2n+1)}. \quad (12)$$

Setzen wir z. B.

$$k_0 = 3535, \quad k_2 = 1,882, \quad (13)$$

so erhält man für die niedrigsten Quantenzahlen folgende Energiewerte:

$$\begin{array}{ccc} j = 0 & 1 & \\ n = 0 & E = 240 & 100 \\ & 1 & (0,417) \end{array} \quad (14)$$

Bei der obigen Wahl der Konstanten ergibt sich also (abgesehen vom Spin) die Masse von Elektron, Meson und Yukawa-Quant. Doch darf man die Bedeutung dieser Übereinstimmung nicht überschätzen. Unsere Näherung ist sicher noch weit von der Wirklichkeit entfernt. Die Frage der halbzahligem Spins ist ungeklärt und die unbegrenzte Fortsetzung des Spektrums zur Masse Null hin nicht im Einklang mit der Erfahrung. Außerdem sind Proton und Neutron noch nicht eingeordnet. Als positives Faktum dieser quantitativen Betrachtung kann man höchstens die Folgerungen aus Gl. (6) und (7) ansehen. Danach ist $U = 163$ und $a = 28,8$. Letzteres bedeutet, daß das Coulombfeld noch weit innerhalb des klassischen Elektronenradius besteht, was mit den bereits erwähnten Erfahrungen über Kaskadenschauer im Einklang ist. In diesem Punkt scheint die vorliegende Näherung der Lorentzschen überlegen zu sein.

Sie ist aber weniger wegen ihrer quantitativen Ergebnisse wichtig. Ihre Bedeutung liegt m. E.

darin, daß man an einem relativ einfachen Modell die Eigenart der gequantelten Feldmechanik und den Charakter der von ihr zu beantwortenden Fragen studieren kann. In der Tat ergeben sich Fragen über die Natur der Elementarteilchen und auch Wege zu ihrer Beantwortung, die bisher kaum ernstlich aufgegriffen werden konnten. Dies mag die Veröffentlichung der vorliegenden, quantitativ nicht befriedigenden Untersuchung rechtfertigen.

Anhang: Prinzip der unveränderten Potentiale

Der Übergang von der klassischen Hamilton-Funktion zur Wellengleichung führt wegen der Nichtvertauschbarkeit der Operatoren zu einer mehrfach untersuchten Unbestimmtheit. Diese ist tiefgreifend, als es scheinen mag, wenn man von algebraischer Seite herkommt, welche die Aufmerksamkeit zunächst nur auf sehr spezielle Variationen richtet. Sie bedeutet, selbst wenn man nicht den allgemeinsten Fall vor Augen hat, daß man beliebige Potentiale verschwinden lassen und neue hervorzaubern kann. Der Hamilton-Funktion

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (1)$$

sind u. a. nach der gewöhnlichen Vorschrift Wellengleichungen folgender Form zugeordnet:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} f(q) \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{f(q)^2} \frac{\partial}{\partial q} \right) f(q) + V(q) \right\} \psi = E \psi, \quad (2)$$

in denen $f(q)$ eine beliebige Funktion von q sein soll. Der Ansatz „korrespondiert“ Gl. (1) und ist außerdem „hermitesch“. Eine einfache Umformung ergibt

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V_1(q) \right\} \psi = E \psi. \quad (3)$$

Darin ist

$$V_1 = V - f \left(\frac{1}{f} \right)'' \quad (4)$$

entsprechend der Funktion f völlig unbestimmt. Der triviale Ansatz $f=1$ führt in diesem Falle, wie man weiß, zur Übereinstimmung mit der Erfahrung.

Schon beim räumlichen Rotator ist die Lage weniger einfach. Die Hamilton-Funktion lautet in Polarkoordinaten

$$\mathcal{H} = \frac{1}{r^2} \left\{ p_{\vartheta}^2 + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} p_{\varphi}^2 \right\}. \quad (5)$$

Hier ist der Übergang nicht durch den Ansatz $f=1$, nicht einmal durch eine einzige Funktion f zu beschreiben. Der Grund dafür ist leicht zu sehen. Da das Integrationselement $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ den Gewichtungsfaktor $\sin \vartheta$ enthält, ist die Bedingung für den hermiteschen Charakter abzuändern. Im übrigen liegen die Verhältnisse ähnlich wie oben.

In Gl. (2, 23) sind wir auf eine Hamilton-Funktion der allgemeineren Form

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} A(q) \cdot p^2 \quad (6)$$

gestoßen. Das Integrationselement möge $d\tau = \varrho(q) dq$ sein. Der zugeordnete Operator lautet allgemein:

$$\mathcal{H} = -\hbar^2 \frac{f}{2\varrho} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\varrho A}{f^2} \frac{\partial}{\partial q} \right) f. \quad (7)$$

Wie sollen wir in diesem Falle f bestimmen? Die übliche Behauptung, daß darüber in jedem Einzelfalle die Erfahrung entscheiden müsse, würde bei dem Ausmaß der Unbestimmtheit darauf hinauslaufen, daß die klassischen Potentialansätze zunächst ihre Gültigkeit verlieren. Die „trivialen“ Beispiele zeigen deutlich, daß es in Wirklichkeit nicht so ist, daß die Quantenmechanik keine neuen Potentiale schafft.

Dies legt die Vermutung nahe, daß es neben den Prinzipien der Korrespondenz und der Hermitizität ein weiteres, bisher meist angewendetes, aber noch nicht ausdrücklich formuliertes Prinzip gibt, welches die Übersetzung der klassischen Mechanik in die Quantenmechanik eindeutig macht. In Anlehnung an die trivialen Beispiele formulieren wir es versuchsweise als „Prinzip der unveränderten Potentiale“. Danach dürfen in Gl. (7) keine Glieder ohne Ableitung auftreten. Es muß also $f=1$ sein [oder einen äquivalenten Wert haben, so daß $(\varrho A f'/f^2)' = 0$ ist]; d. h. für unser Beispiel in Gl. (6):

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2\varrho} \frac{\partial}{\partial q} \left(\varrho A \frac{\partial}{\partial q} \right). \quad (8)$$

Der Ableitung des Operators in Gl. (2, 24) wurde dieses Prinzip zugrundegelegt unter Benutzung des Integrationselementes aus Gl. (2, 25). Letzteres ergibt sich aus der Forderung, daß $H d\sigma$, nach Gl. (2, 23) also z. B. speziell $\sqrt{1-v^2} d\sigma$, Lorentz-invariant sein muß.